**Corrigé**

**1.** L'année 2022 est l'année 2021 + 1, donc on doit calculer $u_1$.

$u_1 = 0,008u_0(200 - u_0) = 0,008 \times 40 \times 160 = 51,2$.

L'estimation est donc de 51,2 oiseaux (arrondie à 51 animaux).

**2.** Résolvons $f(x) = x$.

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff 0,008x(200-x) = x \\ &\iff 1,6x - 0,008x^2 = x \\ &\iff 0,008x^2 - 0,6x = 0 \\ &\iff x(0,008x - 0,6) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 0,008x - 0,6 = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{0,6}{0,008} = 75 \end{aligned}$$

L'équation admet deux solutions dans $[0 ; 100]$ : 0 et 75.

**3.** **a.** Pour tout $x$ entre 0 et 100, on a : $f(x) = -0,008x^2 + 1,6x$. C'est une fonction polynôme de degré 2, dont le coefficient dominant est négatif $(-0,008)$.

Le sommet de la parabole représentant la fonction définie sur $\mathbb{R}$ a pour abscisse : $\dfrac{-1,6}{2 \times (-0,008)} = 100$.

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ serait donc croissante sur l'intervalle $]-\infty ; 100]$ et décroissante sur $[100 ; +\infty[$, donc $f$, qui est définie sur $[0 ; 100]$ est bien strictement croissante sur $[0 ; 100]$.

**b.** Pour tout entier naturel $n$, on pose $P_n$ la propriété : « $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100$ ».

- Initialisation : On a $u_0 = 40$ et $u_1 = 51,2$, donc on a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 100$ donc la propriété $P_0$ est vraie.
- Hérédité : Soit $n$ un entier naturel . On suppose $P_n$ vraie.

$$\begin{aligned} P_n &\implies 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100 \\ &\implies f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(100) \qquad f \text{ est croissante sur } [0 ; 100] \\ &\implies 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 80 \qquad \text{car } f(0) = 0 ;\ f(100) = 80 \\ &\implies 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 100 \\ &\implies P_{n+1} \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est héréditaire.

- Conclusion : La propriété $P_0$ est vraie, et pour un naturel $n$ quelconque, si $P_n$ est vraie, $P_{n+1}$ l'est aussi donc, d'après l'axiome du raisonnement par récurrence :

$\forall n \in \mathbb{N}; \quad 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100$

On en déduit donc que la suite est bornée par 0 et 100, et qu'elle est croissante.

**c.** La suite est croissante et majorée par 100, donc elle converge vers une limite $\ell$, qui est supérieure à $u_0 = 40$ et inférieure au majorant 100.

**d.** Puisque la suite est convergente et définie par récurrence et que la fonction de récurrence $f$ est continue sur $[0 ; 100]$, intervalle contenant la limite $\ell$, d'après le théorème du point fixe, $\ell$ est une solution de l'équation $f(x) = x$.

Comme on a établi que cette équation n'a que deux solutions dans $[0\ ;\ 100]$, 0 et 75, et que l'on a établi que $\ell$ est comprise entre 40 et 100, il vient que $\ell = 75$.

La suite converge donc vers 75.

**4.** Le principe de cette fonction `seuil(p)` est de renvoyer l'année où l'estimation dépasse le seuil p, notre suite ici est croissante et converge vers 75, donc elle est majorée par 75. Aucun terme ne dépassera donc 75, et le test de la boucle `while` sera toujours satisfait, donc on aura une fonction qui tourne de façon infinie et ne renvoie donc aucun résultat.